

PROJETO DE FILTROS ROBUSTOS \mathcal{H}_2 USANDO LMIS COM ESCALARES

LÍCIO B. R. R. ROMÃO*, RICARDO C. L. F. OLIVEIRA*, PEDRO L. D. PERES*

**Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação,
Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP, 13083-852, Campinas, SP, Brasil.*

Emails: {licio, ricfow, peres}@dt.fee.unicamp.br

Abstract— This work deals with the full-ordered robust filtering design problem for discrete-time uncertain linear systems using convex optimization. The matrices of the system are supposed to be time-invariant and to belong to a polytope. Synthesis conditions given in terms of LMIs (Linear Matrix Inequalities) with scalar search have been developed for the robust \mathcal{H}_2 filter design, in both primal (using the observability gramian) and dual (using the controllability gramian) formulations. The proposed conditions are compared to others available in the literature by means of two numerical examples. First, the advantages of the scalar on minimizing the \mathcal{H}_2 performance bound is discussed. In the second example, the influence of the uncertainty in the filter \mathcal{H}_2 performance is analyzed.

Keywords— Robust Filtering, LMIs, Discrete-time systems, Uncertain Systems, \mathcal{H}_2 Norm.

Resumo— Neste trabalho, investiga-se o problema de projeto de filtros robustos de ordem completa para sistemas lineares incertos discretos no tempo por meio de otimização convexa. As matrizes do sistema são supostas invariantes no tempo e pertencentes a um politopo. São fornecidas condições de síntese de filtros robustos \mathcal{H}_2 expressas em termos de LMIs (do inglês, *Linear Matrix Inequalities*) com busca em escalar para as formulações primal (usando o gramiano de observabilidade) e dual (gramiano de controlabilidade). As condições propostas são comparadas com outras condições disponíveis na literatura por meio de dois exemplos numéricos. No primeiro, são ilustradas as vantagens do escalar na minimização do limitante do desempenho \mathcal{H}_2 . No segundo exemplo é feito um estudo da influência das incertezas no desempenho \mathcal{H}_2 do filtro.

Palavras-chave— Filtragem Robusta, LMIs, Sistemas Discretos no Tempo, Sistemas Incertos, Norma \mathcal{H}_2 .

1 Introdução

Nas últimas décadas, diversas alternativas para o projeto de sistemas de controle foram desenvolvidas, como o projeto de controladores baseados na teoria de Lyapunov. Da aplicação dessa importante teoria em sistemas lineares, é possível expressar diversos problemas de análise e síntese em termos de LMIs (do inglês, *Linear Matrix Inequalities*) (Boyd et al., 1994).

A estabilidade quadrática (Boyd et al., 1994) consiste em encontrar uma função de Lyapunov que garanta a estabilidade assintótica do sistema para todo o domínio de incertezas. Devido à flexibilidade para tratar sistemas incertos, técnicas foram desenvolvidas para estender essa abordagem para outros problemas da área de controle, como o problema de filtragem. Dentre os critérios de desempenho analisados, as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ estão entre os mais utilizados. Nesse contexto, vários trabalhos foram desenvolvidos como, por exemplo, no caso de filtragem de sistemas a tempo contínuo (Geromel, 1999; de Souza et al., 2000) e no caso discreto (Geromel et al., 2000; Coutinho et al., 2009; Ishihara et al., 2015). Outros critérios de desempenho foram utilizados, como a energia-a-pico (Palhares e Peres, 2000).

Apesar de prover o filtro ótimo \mathcal{H}_2 ou \mathcal{H}_∞ no caso de sistemas precisamente conhecidos, a estabilidade quadrática pode fornecer resultados conservadores para sistemas incertos. Por isso, condições mais relaxadas foram obtidas com a utilização de funções de Lyapunov dependentes de parâmetros, primeiramente para o caso discreto (Barbosa et al., 2002; Geromel et al., 2002; Xie et al., 2004; Duan et al., 2006) e com algumas extensões para o caso contínuo (Barbosa et al., 2005; de Souza et al., 2007). Em Gao et al. (2008) são utilizadas funções dependentes de parâme-

tros com dependência polinomial de grau maior que um. Em Lacerda et al. (2011) foram propostas condições para o projeto de filtros robustos mais gerais, porém que não contêm a estabilidade quadrática como caso particular nem proveem o filtro ótimo \mathcal{H}_2 ou \mathcal{H}_∞ para sistemas sem incertezas. No contexto de LMIs com escalares, vale ressaltar os trabalhos Morais et al. (2012) e Morais et al. (2013) que apresentam condições para estabilização robusta de sistemas incertos discretos no tempo.

O objetivo deste trabalho é propor condições LMIs com escalares para o projeto de filtros robustos discretos, otimizando como critério de desempenho um limitante da norma \mathcal{H}_2 . São realizadas comparações com a abordagem quadrática de Geromel et al. (2000), com o método baseado em matrizes de Lyapunov dependentes de parâmetros (de Oliveira, 1999; Geromel et al., 2002), casos particulares das condições propostas, e também com a técnica proposta por Lacerda et al. (2011).

2 Preliminares

Considere o sistema linear a tempo discreto com parâmetros incertos e invariantes no tempo dado por

$$\begin{aligned}x(k+1) &= A(\alpha)x(k) + B_1(\alpha)w(k) \\z(k) &= C_1(\alpha)x(k) \\y(k) &= C_2(\alpha)x(k) + D_{21}(\alpha)w(k)\end{aligned}$$

em que $x \in \mathbb{R}^n$ representa o vetor de estados, $w \in \mathbb{R}^r$ a entrada de ruídos, $z \in \mathbb{R}^p$ a saída de referência e $y \in \mathbb{R}^q$ a saída medida. As matrizes incertas do sistema, $(A(\alpha), B_1(\alpha), C_1(\alpha), C_2(\alpha), D_{21}(\alpha))$, pertencem

cem a um conjunto politópico dado por

$$\mathcal{X} = \left\{ R(\alpha) : R(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i R_i \right\}$$

em que $R(\alpha)$ pode ser qualquer matriz do sistema, N é o número de vértices e os parâmetros α_i pertencem ao simplex unitário de ordem N ,

$$\Lambda_N = \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, N \right\}.$$

O objetivo é o projeto de um filtro de ordem completa estritamente próprio,¹ representado por

$$\begin{aligned} x_f(k+1) &= A_f x_f(k) + B_f y(k) \\ z_f(k) &= C_f x_f(k), \end{aligned}$$

em que $x_f \in \mathbb{R}^{n_f}$ com $n_f = n$ e $z_f \in \mathbb{R}^p$ representa a saída do filtro, de modo a minimizar algum critério de desempenho associado à matriz de transferência da entrada do sistema, w , para o erro de estimação, $e = z - z_f$. Note que, com as dimensões das variáveis do problema dadas, as dimensões das matrizes do filtro e do sistema estão definidas.

Define-se o sistema de espaço de estados aumentado, $\tilde{x} = [x' \quad x_f']^T$, dado por

$$\begin{aligned} \tilde{x}(k+1) &= \tilde{A}(\alpha)\tilde{x}(k) + \tilde{B}(\alpha)w(k) \\ e(k) &= \tilde{C}(\alpha)\tilde{x}(k), \end{aligned} \quad (1)$$

com

$$\tilde{A}(\alpha) = \begin{bmatrix} A(\alpha) & 0 \\ B_f C_2(\alpha) & A_f \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}(\alpha) = \begin{bmatrix} B_1(\alpha) \\ B_f D_{21}(\alpha) \end{bmatrix},$$

$$\tilde{C}(\alpha) = [C_1(\alpha) \quad -C_f],$$

e a matriz de transferência da entrada w para o erro de estimação e

$$H(z, \alpha) = \tilde{C}(\alpha) (zI - \tilde{A}(\alpha))^{-1} \tilde{B}(\alpha). \quad (2)$$

Neste trabalho, é considerado o custo garantido \mathcal{H}_2 como critério de desempenho, isto é, um limitante para o valor de pior caso da norma \mathcal{H}_2 da matriz de transferência definida em (2), para todo $\alpha \in \Lambda_N$. Assim, o problema de filtragem robusta pode ser enunciado da seguinte maneira: determine as matrizes A_f , B_f e C_f de modo que o sistema (1) tenha ρ como um limitante superior (custo garantido) da norma \mathcal{H}_2 da matriz de transferência definida em (2), $\forall \alpha \in \Lambda_N$.

O Lema de Finsler (de Oliveira e Skelton, 2001) e o Lema da Projeção (Skelton et al., 1998), utilizados neste trabalho, são apresentados a seguir por conveniência.

¹Condições para o projeto de filtros próprios podem ser obtidas de maneira similar.

Lema 1 (Finsler) Considere $\mathcal{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\mathcal{B}^{m \times n}$ com $\text{rank}(\mathcal{B}) < n$ e \mathcal{B}_\perp uma base para o espaço nulo de \mathcal{B} . Então, as seguintes condições são equivalentes:

- $\mathcal{B}'_\perp \mathcal{Q} \mathcal{B}_\perp < 0$,
- $\exists \mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n \times m} : \mathcal{Q} + \mathcal{X} \mathcal{B} + \mathcal{B}' \mathcal{X}' < 0$.

Lema 2 (Projeção) Dados $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}' \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{r \times n}$, existe $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{r \times m}$ tal que

$$\mathcal{Q} + \mathcal{A}' \mathcal{X}' \mathcal{B} + \mathcal{B}' \mathcal{X} \mathcal{A} < 0$$

se e somente se $\mathcal{A}'_\perp \mathcal{Q} \mathcal{A}_\perp < 0$, $\mathcal{B}'_\perp \mathcal{Q} \mathcal{B}_\perp < 0$ com $\mathcal{A} \mathcal{A}_\perp = 0$ e $\mathcal{B} \mathcal{B}_\perp = 0$.

3 Custo Garantido \mathcal{H}_2

Custos garantidos \mathcal{H}_2 podem ser estabelecidos por meio de LMIs robustas (isto é, dependentes de parâmetros).

Lema 3 Dado um sistema dinâmico discreto descrito como em (1), este apresenta um custo garantido \mathcal{H}_2 limitado por ρ se, e somente se, existirem matrizes simétricas $0 < M(\alpha) \in \mathbb{R}^{r \times r}$ e $0 < P(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tais que as seguintes LMIs robustas² sejam factíveis para todo $\alpha \in \Lambda_N$:

$$\text{Tr}(M(\alpha)) < \rho^2, \quad (3)$$

$$\tilde{B}(\alpha)' P(\alpha) \tilde{B}(\alpha) - M(\alpha) < 0, \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}(\alpha)' P(\alpha) \tilde{A}(\alpha) - P(\alpha) & \tilde{C}(\alpha)' \\ \star & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (5)$$

ou, equivalentemente, utilizando uma formulação dual com $M(\alpha) \in \mathbb{R}^{p \times p}$, que (3),

$$\tilde{C}(\alpha) P(\alpha) \tilde{C}(\alpha)' - M(\alpha) < 0,$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}(\alpha) P(\alpha) \tilde{A}(\alpha)' - P(\alpha) & \tilde{B}(\alpha) \\ \star & -I \end{bmatrix} < 0$$

sejam verificadas $\forall \alpha \in \Lambda_N$.

As condições do Lema 3 estão apresentadas na forma de LMIs robustas (condições de dimensões infinitas, que devem ser verificadas $\forall \alpha \in \Lambda_N$) que, para a obtenção de condições finitas (programáveis), exigem estruturas particulares para as variáveis do problema. Note que, nesse caso, as condições primal e dual podem produzir valores diferentes de custo garantido \mathcal{H}_2 .

Condições alternativas para o cálculo do custo garantido \mathcal{H}_2 que incluem escalares podem ser obtidas utilizando-se os Lemas 1 e 2 aplicados nas condições do Lema 3.

Lema 4 O sistema em (1) tem um custo garantido \mathcal{H}_2 limitado por ρ se, e somente se, existirem matrizes simétricas $M(\alpha) \in \mathbb{R}^{r \times r}$ e $0 < P(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes

²O símbolo \star representa o bloco simétrico.

$X(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $F(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e um escalar $\xi \in (-1, 1)$ tais que as restrições (3),

$$\begin{bmatrix} P(\alpha) - F(\alpha) - F(\alpha)' & F(\alpha)' \tilde{B}(\alpha) \\ \star & -M(\alpha) \end{bmatrix} < 0, \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{K}_{11} & \tilde{A}(\alpha)' X(\alpha) - \xi X(\alpha)' & \tilde{C}(\alpha)' \\ \star & P(\alpha) - X(\alpha) - X(\alpha)' & 0 \\ \star & \star & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (7)$$

$$\mathcal{K}_{11} = -P(\alpha) + \xi(\tilde{A}(\alpha)' X(\alpha) + X(\alpha)' \tilde{A}(\alpha)),$$

ou, equivalentemente (formulação dual), com $M(\alpha) \in \mathbb{R}^{p \times p}$, que (7),

$$\begin{bmatrix} P(\alpha) - G(\alpha) - G(\alpha)' & G(\alpha)' \tilde{C}(\alpha)' \\ \star & -M(\alpha) \end{bmatrix} < 0,$$

$$\begin{bmatrix} P(\alpha) - X(\alpha) - X(\alpha)' & \star & \star \\ \tilde{A}(\alpha) X(\alpha) - \xi X(\alpha)' & \hat{\mathcal{K}}_{22} & \star \\ 0 & \tilde{B}(\alpha)' & -I \end{bmatrix} < 0,$$

$$\hat{\mathcal{K}}_{22} = -P(\alpha) + \xi(\tilde{A}(\alpha) X(\alpha) + X(\alpha)' \tilde{A}(\alpha)'),$$

sejam factíveis para todo $\alpha \in \Lambda_N$.

Prova: A prova é feita para o caso primal, o caso dual segue passos similares. A restrição (6) é obtida a partir da aplicação do Lema 1 em (4) com $\mathcal{Q} = \text{diag}\{P(\alpha), -M(\alpha)\}$ e $\mathcal{B} = [-I \ \tilde{B}(\alpha)']$.

Por outro lado, (7) é obtida por meio da aplicação do Lema 2 em (5) com

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} -P(\alpha) & 0 & \tilde{C}(\alpha)' \\ \star & P(\alpha) & 0 \\ \star & \star & -I \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} = [\xi I \ I \ 0],$$

$$\mathcal{A} = [\tilde{A}(\alpha) \ -I \ 0].$$

O intervalo do escalar ξ é definido por

$$\mathcal{B}'_{\perp} \mathcal{Q}(\alpha) \mathcal{B}_{\perp} = \begin{bmatrix} (\xi^2 - 1)P(\alpha) & \tilde{C}(\alpha)' \\ \star & -I \end{bmatrix} < 0,$$

resultando em $\xi \in (-1, 1)$. \square

4 Procedimento de Linearização

Nesta seção, as condições apresentadas para o cálculo do custo garantido \mathcal{H}_2 de sistemas dinâmicos discretos incertos, com variáveis extras e busca em escalar, são utilizadas para a síntese de filtros robustos. Como foram apresentadas, as condições do Lema 4 resultam em BMIs (do inglês, *Bilinear Matrix Inequalities*), pois aparecem produtos entre variáveis do problema. Por exemplo, para a condição primal, o produto $\tilde{A}(\alpha)' X$ é dado por

$$\begin{aligned} \tilde{A}(\alpha)' X &= \begin{bmatrix} A'(\alpha) & C_2(\alpha)' B_f' \\ 0 & A_f' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A(\alpha)' X_1 + C_2(\alpha)' B_f' X_3 & \mathcal{L}_{12}(\alpha) \\ A_f' X_3 & A_f' X_4 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

com $\mathcal{L}_{12}(\alpha) = A(\alpha)' X_2 + C_2(\alpha)' B_f' X_4$.

A seguir, apresenta-se um procedimento para desacoplar as variáveis de interesse, permitindo assim a solução do problema por meio de relaxações LMIs. A estratégia segue passos similares aos utilizados em Geromel et al. (2002) e de Oliveira (1999), considerando as matrizes $X(\alpha)$ do Lema 4 como constantes e particionadas em blocos $n \times n$. Assim, definem-se as matrizes particionadas

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} Z^{-T} & \hat{U} \\ U & \hat{X} \end{bmatrix}, \quad \tilde{X}^{-1} = \begin{bmatrix} Y' & \hat{V}' \\ V' & \hat{Y}' \end{bmatrix},$$

com $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\hat{U} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\hat{X} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\hat{V} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\hat{Y} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e Z^{-T} representando a transposta da inversa da matriz Z . Note que $\tilde{X} \tilde{X}^{-1} = I$, ou seja

$$\begin{bmatrix} Z^{-T} Y' + \hat{U} V' & Z^{-T} \hat{V}' + \hat{U} \hat{Y}' \\ U Y' + \hat{X} V' & U \hat{V}' + \hat{X} \hat{Y}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Definindo

$$\tilde{T} = \begin{bmatrix} Z' & Y' \\ 0 & V' \end{bmatrix}$$

e a transformação de variáveis

$$\begin{bmatrix} Q & F \\ L & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} A_f & B_f \\ C_f & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{K}_f} \begin{bmatrix} U Z' & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

os seguintes produtos são linearizados:

$$\begin{aligned} \tilde{T}' \tilde{A}(\alpha) \tilde{X} \tilde{T} &= \begin{bmatrix} ZA(\alpha) & ZA(\alpha) \\ YA(\alpha) + FC_2 + Q & YA(\alpha) + FC_2 \end{bmatrix}, \\ \tilde{T}' \tilde{B}(\alpha) &= \begin{bmatrix} ZB_1(\alpha) \\ YB_1(\alpha) + FD_{21}(\alpha) \end{bmatrix}, \\ \tilde{C}(\alpha) \tilde{X} \tilde{T} &= [C_1(\alpha) - L \quad C_1(\alpha)], \\ \tilde{T}' \tilde{X} \tilde{T} &= \begin{bmatrix} Z & Z \\ Y + S & Y \end{bmatrix}, \quad S = VUZ', \\ \tilde{T}' \tilde{X}' P(\alpha) \tilde{X} \tilde{T} &= \begin{bmatrix} E(\alpha) & G(\alpha) \\ \star & H(\alpha) \end{bmatrix}, \\ \tilde{T}' P(\alpha) \tilde{T} &= \begin{bmatrix} W(\alpha) & J(\alpha) \\ \star & K(\alpha) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Note que as formulações primal e dual exigem estratégias distintas de linearização para $P(\alpha)$.

5 Filtragem Robusta \mathcal{H}_2

As condições de projeto de um filtro robusto \mathcal{H}_2 , principais resultados deste trabalho, são apresentadas a seguir.

Teorema 1 (Primal) *O sistema (1) tem custo garantido \mathcal{H}_2 limitado por ρ se existirem matrizes simétricas $E_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $H_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M_i \in \mathbb{R}^{r \times r}$, matrizes $G_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 1, \dots, N$, $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $F \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $L \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e um escalar*

$\xi \in (-1, 1)$ solução do seguinte problema de otimização, para $i = 1, \dots, N$:

$$\text{Tr}(M_i) < \rho^2, \quad \begin{bmatrix} E_i & G_i \\ \star & H_i \end{bmatrix} > 0, \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{V}_{11i} & \mathcal{V}_{12i} & ZB_{1i} \\ \star & \mathcal{V}_{22i} & YB_{1i} + FD_{21i} \\ \star & \star & -M_i \end{bmatrix} < 0, \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11i} & \Phi_{12i} & \Phi_{13i} & \Phi_{14i} & C'_{1i} - L' \\ \star & \Phi_{22i} & \Phi_{23i} & \Phi_{24i} & C'_{1i} \\ \star & \star & \Phi_{33i} & \Phi_{34i} & 0 \\ \star & \star & \star & \Phi_{44i} & 0 \\ \star & \star & \star & \star & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{11i} &= E_i - Z - Z', & \mathcal{V}_{12i} &= G_i - Z - Y' - S' \\ \mathcal{V}_{22i} &= H_i - Y - Y', & \Phi_{11i} &= -E_i + \xi(ZA_i + A'_i Z') \\ \Phi_{12i} &= -G_i + \xi(ZA_i + A'_i Y' + C'_{2i} F' + Q') \\ \Phi_{13i} &= A'_i Z' - \xi Z, & \Phi_{14i} &= A'_i Y' + C'_{2i} F' + Q' - \xi Z \\ \Phi_{22i} &= -H_i + \xi(YA_i + FC_{2i} + A'_i Y' + C'_{2i} F') \\ \Phi_{23i} &= A'_i Z' - \xi(Y + S), & \Phi_{44i} &= H_i - Y - Y' \\ \Phi_{24i} &= A'_i Y' + C'_{2i} F' + Q' - \xi Y \\ \Phi_{33i} &= E_i - Z - Z', & \Phi_{34} &= G_i - Y' - S' - Z \end{aligned}$$

Caso factível, as matrizes do filtro são dadas por³

$$\begin{aligned} A_f &= V^{-1}Q(UZ')^{-1}, & B_f &= V^{-1}F \\ C_f &= L(UZ')^{-1}. \end{aligned} \quad (11)$$

Prova: Primeiramente, multiplica-se por α_i e soma-se para todo i a restrição (8), obtendo-se (3) e $P(\alpha) > 0$. Fazendo o mesmo para (9) e (10), têm-se as seguintes LMIs robustas⁴

$$\begin{bmatrix} \mathcal{S}_{11} & \mathcal{S}_{12} & ZB_1(\alpha) \\ \star & \mathcal{S}_{22} & YB_1(\alpha) + FD_{21}(\alpha) \\ \star & \star & -M(\alpha) \end{bmatrix} < 0, \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P}_{11} & \mathcal{P}_{12} & \mathcal{P}_{13} & \mathcal{P}_{14} & C_1(\alpha)' - L' \\ \star & \mathcal{P}_{22} & \mathcal{P}_{23} & \mathcal{P}_{24} & C_1(\alpha)' \\ \star & \star & \mathcal{P}_{33} & \mathcal{P}_{34} & 0 \\ \star & \star & \star & \mathcal{P}_{44} & 0 \\ \star & \star & \star & \star & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{11} &= E(\alpha) - \text{He}(Z), & \mathcal{S}_{12} &= G(\alpha) - Z - Y' - S', \\ \mathcal{S}_{22} &= H(\alpha) - \text{He}(Y), & \mathcal{P}_{13} &= A(\alpha)'Z' - \xi Z, \\ \mathcal{P}_{11} &= -E(\alpha) + \xi \text{He}(ZA(\alpha)), \\ \mathcal{P}_{12} &= -G(\alpha) + \xi(ZA(\alpha) + A(\alpha)'Y' + C_2(\alpha)'F' + Q'), \\ \mathcal{P}_{14} &= A(\alpha)'Y' + C_2(\alpha)'F' + Q' - \xi Z, \\ \mathcal{P}_{22} &= -H(\alpha) + \xi \text{He}(YA(\alpha) + FC_2(\alpha)), \\ \mathcal{P}_{23} &= A(\alpha)'Z' - \xi(Y + S), & \mathcal{P}_{44} &= H(\alpha) - \text{He}(Y), \\ \mathcal{P}_{24} &= A(\alpha)'Y' + C_2(\alpha)'F' - \xi Y, \\ \mathcal{P}_{33} &= E(\alpha) - Z - Z', & \mathcal{P}_{34} &= G(\alpha) - Y' - S' - Z. \end{aligned}$$

³A matriz V é determinada pela relação, $S = VUZ'$, obtida na seção de linearização, em que a matriz U é uma matriz não singular arbitrária. Por exemplo, $U = I$.

⁴Por definição, $\text{He}(A) = A + A'$.

Multiplicando (12) à direita por

$$\mathcal{T} = \text{diag}\{\tilde{T}^{-1}\tilde{X}^{-1}, I\},$$

à esquerda por \mathcal{T}' e usando as relações de linearização, obtém-se (6) com $F(\alpha)^{-1} = \tilde{X}$.

Multiplicando (13) à direita por

$$U = \text{diag}\{\tilde{T}^{-1}\tilde{X}^{-1}, \tilde{T}^{-1}\tilde{X}^{-1}, I\}$$

e à esquerda por \mathcal{U}' , recupera-se (7). \square

Teorema 2 (Dual) O sistema apresentado em (1) tem custo garantido \mathcal{H}_2 limitado por ρ se existirem matrizes simétricas $W_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $K_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$, matrizes $J_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 1, \dots, N$, $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $F \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $L \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e um escalar $\xi \in (-1, 1)$ solução do seguinte problema de otimização, para $i = 1, \dots, N$:

$$\text{Tr}(M_i) < \rho^2, \quad \begin{bmatrix} W_i & J_i \\ \star & K_i \end{bmatrix} > 0,$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{R}_{11i} & J_i - Z - Y' - S' & C'_{1i} - L' \\ \star & K_i - Y - Y' & C'_{1i} \\ \star & \star & -M_i \end{bmatrix} < 0,$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{N}_{11i} & \mathcal{N}_{12i} & \mathcal{N}_{13i} & \mathcal{N}_{14i} & 0 \\ \star & \mathcal{N}_{22i} & \mathcal{N}_{23i} & \mathcal{N}_{24i} & 0 \\ \star & \star & \mathcal{N}_{33i} & \mathcal{N}_{34i} & ZB_{1i} \\ \star & \star & \star & \mathcal{N}_{44i} & \mathcal{N}_{45i} \\ \star & \star & \star & \star & -I \end{bmatrix} < 0,$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{11i} &= W_i - \text{He}(Z), & \mathcal{N}_{11i} &= \mathcal{R}_{11i}, \\ \mathcal{N}_{12i} &= J_i - Z - Y' - S', & \mathcal{N}_{13i} &= A'_i Z' - \xi Z, \\ \mathcal{N}_{14i} &= A'_i Y' + C'_{2i} F' + Q' - \xi Z, \\ \mathcal{N}_{22i} &= K_i - \text{He}(Y), & \mathcal{N}_{23i} &= A'_i Z' - \xi(Y + S), \\ \mathcal{N}_{24i} &= A'_i Y' + C'_{2i} F' - \xi Y, & \mathcal{N}_{33i} &= -W_i + \xi \text{He}(ZA_i), \\ \mathcal{N}_{34i} &= -J_i + \xi(ZA_i + A'_i Y' + C'_{2i} F' + Q'), \\ \mathcal{N}_{44i} &= -K_i + \xi \text{He}(YA_i + FC_{2i}), \\ \mathcal{N}_{45i} &= YB_{1i} + FD_{21i}. \end{aligned}$$

Caso factível, as matrizes do filtro são dadas por (11).

Prova: Similar à do caso primal. \square

É importante notar que as condições dos teoremas 1 e 2 contêm e generalizam as condições apresentadas em de Oliveira (1999, Teorema 5.5) e Geromel et al. (2002, Teorema 5.1), respectivamente. Para tanto, define-se $\xi = 0$ nas condições deste trabalho. Além disso, no Teorema 2, fazendo-se $\tilde{X} = \tilde{X}' = P$ (constante), recuperam-se as condições de filtragem com estabilidade quadrática de (Geromel et al., 2000, Teorema 3).

6 Experimentos Numéricos

As rotinas foram implementadas usando o Matlab 2013b (versão 8.2.0.701) 64 bits e os pacotes Yalmip (Löfberg, 2004) e SeDuMi (Sturm, 1999), em um computador com o sistema operacional Ubuntu 14.04 LTS. Foram feitos dois experimentos numéricos para validação das condições propostas. O primeiro consiste na verificação da influência do parâmetro ξ no custo garantido \mathcal{H}_2 , enquanto que o segundo consiste na comparação dos valores de norma providos pela condição do Teorema 2 com (Geromel et al., 2000, Teorema 3) e (Lacerda et al., 2011, Lema 7).

Exemplo 1: Considere o seguinte sistema politópico discreto linear e invariante no tempo definido pelas matrizes (geradas aleatoriamente)

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.834 & -0.015 \\ 0.06 & 0.692 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0.527 & -0.348 \\ -0.771 & -0.463 \end{bmatrix},$$

$$B_{11} = \begin{bmatrix} 1.275 & 3.45 \\ 0.957 & 1.028 \end{bmatrix}, \quad B_{12} = \begin{bmatrix} 0.914 & 0.525 \\ -1.016 & 3.318 \end{bmatrix},$$

$$C_{11} = [0.49 \quad 0.502], \quad C_{12} = [1.412 \quad -0.208],$$

$$C_{21} = [-0.361 \quad -1.512], \quad C_{22} = [-0.766 \quad -1.645],$$

$$D_{211} = [0.177 \quad -0.098], \quad D_{212} = [3.247 \quad -1.977].$$

Na Figura 1, é apresentado o resultado da aplicação das condições dos teoremas 1 e 2. Com base nos resultados, percebe-se a importância do escalar ξ para o cálculo do custo garantido \mathcal{H}_2 . Para a condição do Teorema 2, realizando uma busca linear com granulação de 0.05 no intervalo de $(-1, 1)$, obteve-se uma redução de cerca de 24% (para $\xi = -0.65$) quando comparado com a condição (Geromel et al., 2002, Teorema 5.1), que corresponde a $\xi = 0$. Conclusões semelhantes são obtidas com a utilização do Teorema 1, reduzindo em 18% (para $\xi = 0.55$) o limitante \mathcal{H}_2 quando comparado com (de Oliveira, 1999, Teorema 5.5), indicando que a busca no parâmetro ξ pode prover custos garantidos \mathcal{H}_2 menos conservadores.

Exemplo 2: Este exemplo tem o objetivo de comparar o desempenho das condições (Geromel et al., 2000, Teorema 3) e (Lacerda et al., 2011, Lema 7) (para $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 0$) com o Teorema 2 (para $\xi = 0$) ao aumentar-se gradativamente a quantidade de incerteza do sistema. Para tanto, cria-se, inicialmente, um sistema precisamente conhecido com matrizes A, B_1, C_1, C_2, D_{21} e, em seguida, constrói-se um sistema politópico com dois vértices, $A_1 = A$ e $A_2 = \zeta A$, e as demais matrizes permanecem inalteradas. Note que, para $\zeta = 1$, tem-se um sistema precisamente conhecido. As matrizes (geradas aleatoriamente) são

$$A = \begin{bmatrix} 0.009 & 0.015 & 0 \\ 0 & -0.448 & -0.298 \\ 0.153 & 0.284 & -0.159 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} -1.058 \\ -8.357 \\ 4.339 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = [-1.011 \quad 2.973 \quad 3.253],$$

$$C_2 = [1.384 \quad 0.289 \quad 4.288], \quad D_{21} = [-4.305],$$

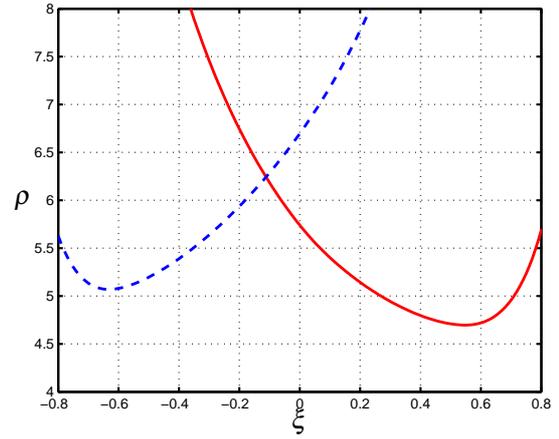


Figura 1: Influência do parâmetro ξ no cálculo do custo garantido \mathcal{H}_2 para o sistema do Exemplo 1 usando as condições do Teorema 1 (vermelho contínua) e do Teorema 2 (azul tracejada).

e o resultado é apresentado na Figura 2. Observa-se que, quando a incerteza é baixa (valores de ζ próximos a 1), a condição do Teorema 2 provê resultados melhores que as condições (Lacerda et al., 2011, Lema 7) e (Geromel et al., 2000, Teorema 3). Neste exemplo, a condição de Lacerda et al. (2011) produz resultados menos conservadores para valores de $\zeta > 1.56$.

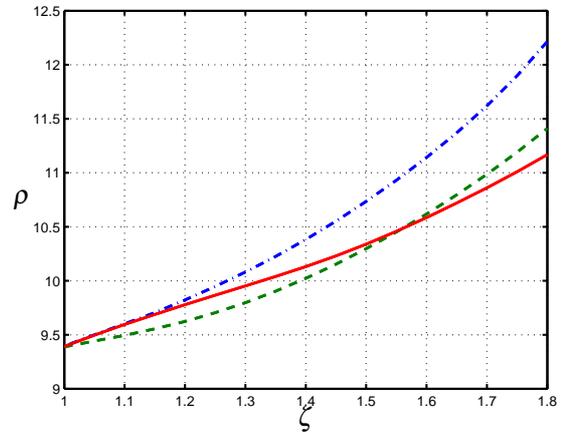


Figura 2: Limitante da norma \mathcal{H}_2 fornecido pelas condições de Lacerda et al. (2011, Lema 7) (vermelho contínua), Geromel et al. (2000, Teorema 3) (azul tracejada com ponto) e Teorema 2 (verde tracejada) para o sistema do Exemplo 2.

7 Conclusões

No presente trabalho, foram propostas novas condições LMIs com escalares que contêm e generalizam condições \mathcal{H}_2 clássicas da literatura para o projeto de

filtros robustos de ordem completa em sistemas politípicos discretos invariantes no tempo.

Os experimentos numéricos elaborados comprovam a redução do conservadorismo em termos do custo garantido \mathcal{H}_2 ao se realizarem buscas no escalar, evidenciando que as condições propostas podem prover resultados melhores que condições de filtragem robusta da literatura ao custo de um maior esforço computacional.

Agradecimentos

Às agências FAPESP (Proc. 2014/06408-4), CNPq e Capes.

Referências

- Barbosa, K. A., de Souza, C. E. e Trofino, A. (2002). Robust \mathcal{H}_2 filtering for discrete-time uncertain linear systems using parameter-dependent Lyapunov functions, *Proc. 2002 Amer. Control Conf.*, Anchorage, AK, USA, pp. 3224–3229.
- Barbosa, K. A., de Souza, C. E. e Trofino, A. (2005). Robust \mathcal{H}_2 filtering for uncertain linear systems: LMI based methods with parametric Lyapunov functions, *Syst. Control Lett.* **54**(3): 251–262.
- Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E. e Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, PA.
- Coutinho, D. F., de Souza, C. E. e Barbosa, K. A. (2009). Robust \mathcal{H}_∞ filter design for a class of discrete-time parameter varying systems, *Automatica* **45**(12): 2946–2945.
- de Oliveira, M. C. (1999). *Controle de Sistemas Lineares baseado nas Desigualdades Matriciais Lineares*, PhD Thesis, University of Campinas, Campinas, SP, Brazil.
- de Oliveira, M. C. e Skelton, R. E. (2001). Stability tests for constrained linear systems, in S. O. Reza Moheimani (ed.), *Perspectives in Robust Control*, Vol. 268 of *Lecture Notes in Control and Information Science*, Springer-Verlag, New York, NY, pp. 241–257.
- de Souza, C. E., Barbosa, K. A. e Trofino, A. (2007). Robust filtering for linear systems with convex-bounded uncertain time-varying parameters, *IEEE Trans. Autom. Control* **52**(6): 1132–1138.
- de Souza, C. E., Fu, M. e Trofino, A. (2000). Robust \mathcal{H}_∞ filter design using parameter dependent Lyapunov functions, *Proc. 3rd IFAC Symp. Robust Control Design*, Prague, Czech Republic, pp. 1–6.
- Duan, Z. S., Zhang, J. X., Zhang, C. S. e Mosca, E. (2006). Robust \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ filtering for uncertain linear systems, *Automatica* **42**(11): 1919–1926.
- Gao, H., Meng, X. e Chen, T. (2008). A new design of robust H_2 filters for uncertain systems, *Syst. Control Lett.* **57**(7): 585–593.
- Geromel, J. C. (1999). Optimal linear filtering under parameter uncertainty, *IEEE Trans. Signal Process.* **47**(1): 168–175.
- Geromel, J. C., Bernussou, J., Garcia, G. e de Oliveira, M. C. (2000). \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ robust filtering for discrete-time linear systems, *SIAM J. Control Optim.* **38**(5): 1353–1368.
- Geromel, J. C., de Oliveira, M. C. e Bernussou, J. (2002). Robust filtering of discrete-time linear systems with parameter dependent Lyapunov functions, *SIAM J. Control Optim.* **41**(3): 700–711.
- Ishihara, J. Y., Terra, M. H. e Cerri, J. P. (2015). Optimal robust filtering for systems subject to uncertainties, *Automatica* **52**: 111–117.
- Lacerda, M. J., Oliveira, R. C. L. F. e Peres, P. L. D. (2011). Robust \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ filter design for uncertain linear systems via LMIs and polynomial matrices, *Signal Process.* **91**(5): 1115–1122.
- Löfberg, J. (2004). YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB, *Proc. 2004 IEEE Int. Symp. on Comput. Aided Control Syst. Des.*, Taipei, Taiwan, pp. 284–289.
- Morais, C. F., Braga, M. F., Linguanotto, A. S., Oliveira, R. C. L. F. e Peres, P. L. D. (2012). Controle robusto por realimentação de estados para sistemas lineares discretos no tempo por meio de LMIs com parâmetros escalares, *XIX CBA*, Campina Grande, PB, Brasil, pp. 1664–1671.
- Morais, C. F., Braga, M. F., Oliveira, R. C. L. F. e Peres, P. L. D. (2013). Robust state feedback control for discrete-time linear systems via LMIs with a scalar parameter, *Proc. 2013 Amer. Control Conf.*, Washington, DC, USA, pp. 3876–3881.
- Palhares, R. M. e Peres, P. L. D. (2000). Robust filtering with guaranteed energy-to-peak performance — an LMI approach, *Automatica* **36**(6): 851–858.
- Skelton, R. E., Iwasaki, T. e Grigoriadis, K. (1998). *A Unified Algebraic Approach to Linear Control Design*, Taylor & Francis, Bristol, PA.
- Sturm, J. F. (1999). Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones, *Optim. Method Softw.* **11**(1–4): 625–653. <http://sedumi.ie.lehigh.edu/>.

Xie, L., Lu, L., Zhang, D. e Zhang, H. (2004). Improved robust \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ filtering for uncertain discrete-time systems, *Automatica* **40**(5): 873–880.