

# PROJETO DE FILTROS PARA SISTEMAS A TEMPO DISCRETO COM CRITÉRIO $\mathcal{H}_\infty$ EM FAIXA DE FREQUÊNCIAS

LÍCIO B. R. R. ROMÃO\*, RICARDO C. L. F. OLIVEIRA\*, PEDRO L. D. PERES\*

\*Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação,  
Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP, 13083-852, Campinas, SP, Brasil.

Emails: {licio, ricfow, peres}@dt.fee.unicamp.br

**Abstract**— This paper addresses the problem of  $\mathcal{H}_\infty$  filtering for discrete-time linear systems with middle-frequency specifications using the generalized Kalman-Yakubovich-Popov (gKYP) lemma. The proposed approach transforms the matrix inequalities from the gKYP lemma into linear matrix inequalities (LMIs) using structured slack variables and a simple stability condition to ensure  $\mathcal{H}_\infty$  performance on the specified frequency range. Being based on the LMI framework, the approach can be extended to deal with the robust filtering problem for polytopic uncertain systems. Numerical examples illustrate the effectiveness of the proposed condition.

**Keywords**—  $\mathcal{H}_\infty$  Filtering, Linear Matrix Inequalities, KYP Lemma, Uncertain Discrete-time Systems.

**Resumo**— Este trabalho aborda o problema de filtragem  $\mathcal{H}_\infty$  de sistemas lineares a tempo discreto com especificações em média frequência por meio do lema de Kalman-Yakubovich-Popov generalizado (gKYP). A abordagem proposta transforma as desigualdades matriciais do gKYP em desigualdades matriciais lineares (em inglês, *Linear Matrix Inequalities – LMIs*) utilizando variáveis de folga estruturadas e uma condição de estabilidade simplificada para assegurar o desempenho  $\mathcal{H}_\infty$  na faixa de frequência especificada. Por ser baseado em LMIs, o método pode ser estendido para tratar o problema de filtragem robusta para sistemas com incertezas politópicas. Exemplos numéricos ilustram a efetividade da condição proposta.

**Palavras-chave**— Filtragem  $\mathcal{H}_\infty$ , Desigualdades Matriciais Lineares, Lema de KYP, Sistemas Incertos Discretos.

## 1 Introdução

A importância do lema de Kalman-Yakubovich-Popov (KYP) para a teoria de controle é amplamente reconhecida, uma vez que instâncias desse lema compreendem resultados tradicionais da literatura, como a caracterização de positividade real e matrizes de transferência limitadas. O lema pode ser, por exemplo, associado ao BRL (do inglês, *Bounded-Real Lemma*), que é extensivamente empregado no contexto de controle  $\mathcal{H}_\infty$  de sistemas dinâmicos.

Em sua forma padrão, o lema de KYP relaciona desigualdades definidas no domínio da frequência (tanto para o caso contínuo, como para o caso discreto) com desigualdades matriciais (Rantzer, 1996). Recentemente, extensões do lema de KYP que abordam desigualdades em intervalos no domínio da frequência foram desenvolvidas na literatura (Iwasaki et al., 2000; Iwasaki e Hara, 2005; Graham et al., 2009). Essas extensões são úteis para o projeto de sistemas de controle que operam em faixas específicas de frequência. Mais especificamente, o resultado em (Iwasaki e Hara, 2005) é conhecido como lema de Kalman-Yakubovich-Popov generalizado (gKYP).

Dentre os diversos avanços para o gKYP, destacam-se os trabalhos Pipeleers e Vandenbergue (2011), You e Doyle (2013) e Pipeleers et al. (2014). O primeiro avançou nos resultados apresentados em (Iwasaki e Hara, 2005), provando que algumas matrizes da formulação original podem ser feitas reais sem perda de generalidade. You e Doyle (2013) usam dualidade com o objetivo de explorar detalhes da extensão proposta em (Iwasaki e Hara, 2005). Finalmente, Pipeleers et al. (2014) generalizaram a aplicação do gKYP para múltiplos intervalos disjuntos.

Apesar da teoria prover resultados necessários e suficientes para a análise de desempenho  $\mathcal{H}_\infty$  em faixas de

frequências, para o caso de projeto de controladores e filtros, existem alguns pontos em aberto que merecem investigações. Uma condição necessária e suficiente para o projeto de controladores para sistemas contínuos com especificações em baixa frequência foi proposta em Iwasaki e Hara (2007) e para especificações em média frequência em Romão et al. (2016) com matrizes complexas.

A principal contribuição deste trabalho está na proposição de uma condição suficiente para o projeto de filtros para sistemas a tempo discreto com especificações da norma  $\mathcal{H}_\infty$  em intervalos de média frequência utilizando uma condição de estabilidade mais simples quando comparada com outros resultados na literatura (Lee, 2013). Experimentos numéricos ilustram a aplicabilidade da abordagem proposta.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira. Na Seção 2, define-se o problema de filtragem  $\mathcal{H}_\infty$  com especificações em média frequência e introduzem-se os resultados que servem de base para os desenvolvimentos subsequentes. Na Seção 3, apresenta-se a condição de projeto proposta, que compreende o principal resultado do artigo. Na Seção 4, aplica-se a condição desenvolvida em dois exemplos numéricos ilustrativos. A Seção 5 conclui o trabalho.

A notação adotada ao longo deste trabalho é padrão. Os espaços vetoriais real e complexo de dimensão  $n \times m$  são denotados por  $\mathbb{R}^{n \times m}$  e  $\mathbb{C}^{n \times m}$ , respectivamente. Dada uma matriz  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $A^*$  representa o complexo conjugado transposto (para matrizes reais, representa a matriz transposta). O espaço vetorial gerado pelas colunas da matriz  $A$  é denotado por  $\mathcal{R}(A)$ . Se  $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$  tem posto deficiente de colunas, a matriz  $A^\perp$  representa uma matriz cujas colunas formam uma base para o espaço nulo de  $A$ , ou seja,  $AA^\perp = 0$ . Dadas matrizes  $A$  e  $B$ ,  $A \otimes B$  é o produto Kronecker de  $A$  por  $B$ . A notação  $\text{He}(A)$  é

uma abreviação para  $A + A^*$ . Em uma matriz definida por blocos, o símbolo  $\star$  representa o conjugado transposto de seu bloco simétrico. O símbolo  $\sigma(A, s)$  indica a forma quadrática  $[s^* \ 1] A [s^* \ 1]^*$ . A notação  $\min_X f(X)$  s. a.  $g(X) \prec 0$  refere-se a um problema de otimização, lendo-se: minimizar  $f(X)$  sujeito a  $g(X)$  pertencente ao cone das matrizes definidas negativas.

## 2 Preliminares

O problema de filtragem a tempo discreto com especificações de norma  $\mathcal{H}_\infty$  em média frequência pode ser formulado da seguinte forma. Considere o sistema linear a tempo discreto e assintoticamente estável cuja representação em espaços de estados é dada por

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + B_w w(k) \\ z(k) &= C_z x(k) + D_{zw} w(k) \\ y(k) &= C_y x(k) + D_{yw} w(k), \end{aligned} \quad (1)$$

em que  $x \in \mathbb{R}^n$  representa o vetor de estados,  $w \in \mathbb{R}^r$  a entrada de perturbação,  $z \in \mathbb{R}^p$  a saída de referência e  $y \in \mathbb{R}^q$  a saída medida.

Para esse sistema, visa-se projetar um filtro de ordem completa dado por

$$\begin{aligned} x_f(k+1) &= A_f x_f(k) + B_f y(k) \\ z_f(k) &= C_f x_f(k) + D_f y(k), \end{aligned} \quad (2)$$

em que  $x_f \in \mathbb{R}^{n_f}$  com  $n_f = n$  e  $z_f \in \mathbb{R}^p$  representa a saída do filtro, de modo a minimizar a norma  $\mathcal{H}_\infty$  da matriz de transferência da entrada de perturbação,  $w(k)$ , para o erro de estimação,  $e(k) = z(k) - z_f(k)$ , em uma faixa de frequência contida no intervalo  $[0, \pi]$ .

Para tanto, define-se o sistema de espaço de estados aumentado, com variáveis de estados dadas por  $\tilde{x} = [x^* \ x_f^*]^*$ , resultante da interconexão entre o sistema e o filtro como

$$\begin{aligned} \tilde{x}(k+1) &= A\tilde{x}(k) + Bw(k) \\ e(k) &= C\tilde{x}(k) + Dw(k), \end{aligned} \quad (3)$$

em que

$$\left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|c} A & 0 & B_w \\ B_f C_y & A_f & B_f D_{yw} \\ \hline C_z - D_f C_y & -C_f & D_{zw} - D_f D_{yw} \end{array} \right], \quad (4)$$

e a matriz de transferência da entrada  $w(k)$  para o erro de estimação  $e(k)$

$$H(z) = C(zI - A)^{-1} B + D, \quad (5)$$

em que  $z$  representa a variável complexa advinda da transformada  $Z$ . Com essas definições, reformula-se o problema da seguinte maneira: encontre uma realização  $(A_f, B_f, C_f, D_f)$  para o filtro (2) de modo que a norma  $\mathcal{H}_\infty$  da matriz de transferência dada em (5) seja minimizada em um intervalo de frequência, i.e.,  $\|H(z)\|_\infty < \gamma, \forall z = e^{j\omega}, \omega \in [\omega_1, \omega_2]$ .

Os resultados que servem de base para o desenvolvimento da condição de projeto exposta neste trabalho são apresentados nos próximos lemas, a saber, o Lema de Finsler (Skelton et al., 1998) e o Lema gKYP adaptado para tratar o intervalo de média frequência para o caso discreto (Iwasaki e Hara, 2005).

**Lema 1 (Lema de Finsler)** *Dados  $Q = Q^* \in \mathbb{C}^{n \times n}$  e  $B \in \mathbb{C}^{m \times n}$ , com  $\text{rank}(B) = r < \min(m, n)$ , as seguintes condições são equivalentes:*

- i)  $B^\perp Q B^\perp \prec 0$ .
- ii) *Existe uma matriz  $X \in \mathbb{C}^{m \times r}$  tal que*

$$Q + X^* B + B^* X \prec 0.$$

Note que o Lema 1 estabelece a equivalência entre o teste da negatividade da matriz  $Q$  no espaço vetorial ortogonal ao  $\mathcal{R}(B)$  com a existência de uma matriz  $X$  que satisfaz a desigualdade matricial do item ii).

Para abordar o problema de especificações em faixas de frequência no domínio discreto, utiliza-se a notação de Iwasaki e Hara (2005). Primeiramente, tem-se o conjunto

$$\Lambda(\Phi, \Psi) = \left\{ s \in \mathbb{C} : \begin{bmatrix} s \\ 1 \end{bmatrix}^* \Phi \begin{bmatrix} s \\ 1 \end{bmatrix} = 0, \right. \\ \left. \begin{bmatrix} s \\ 1 \end{bmatrix}^* \Psi \begin{bmatrix} s \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0 \right\},$$

caracterizado pela interseção entre os conjuntos  $\sigma(\Phi, s) = 0$  e  $\sigma(\Psi, s) \geq 0$ . Em (Iwasaki e Hara, 2005), apresentam-se as condições para que o conjunto  $\Lambda(\Phi, \Psi)$  forme uma curva no plano complexo. Neste trabalho, interessa-se em intervalos que são segmentos de círculos e, para isso, restringe-se a escolha das matrizes  $\Phi$  e  $\Psi$  a

$$\Phi = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Psi = \begin{bmatrix} 0 & e^{j\omega_c} \\ e^{-j\omega_c} & -2 \cos(\omega_w) \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Observe que a formulação apresentada em (Iwasaki e Hara, 2005) não está limitada a tratar segmentos de círculos, pois pode também ser utilizada para lidar com segmentos de retas; ademais, trabalhos recentes estenderam esses resultados para múltiplos segmentos disjuntos de círculos e de retas (Pipeleers e Vandenbergue, 2011).

Definida a notação, introduz-se a adaptação do lema de KYP para a análise da norma  $\mathcal{H}_\infty$  de sistemas lineares discretos em intervalos de média frequência.

**Lema 2** *Sejam dados escalares  $0 < \omega_1 < \omega_2 < \pi$ , matrizes  $\Phi$  e  $\Psi$  como em (6), matrizes  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  e  $D \in \mathbb{R}^{p \times r}$ , com  $\det(A - e^{j\omega} I) \neq 0, \forall \omega \in [\omega_1, \omega_2]$ . Então, as seguintes condições são equivalentes:*

- i)  $\|H(z)\|_\infty < \gamma, \forall z = e^{j\omega}, \omega \in [\omega_1, \omega_2]$ .  
ii) Existem matrizes hermitianas  $0 \prec Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$  e  $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$  tais que

$$\begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix}^* (\Phi \otimes P + \Psi \otimes Q) \begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C^*C & C^*D \\ D^*C & D^*D - \gamma^2 I \end{bmatrix} \prec 0. \quad (7)$$

**Prova:** Ver (Iwasaki e Hara, 2005).  $\square$

O resultado do Lema 2 estabelece uma condição necessária e suficiente para a análise do desempenho  $\mathcal{H}_\infty$  em faixas de frequências para sistemas discretos; no entanto, na formulação apresentada, esse resultado não é apropriado para resolver o problema de filtragem, uma vez que há produtos triplos envolvendo as variáveis (matrizes do filtro e matrizes  $P$  e  $Q$ ). Para chegar a uma condição mais adequada para o projeto do filtro, algumas manipulações são necessárias. Em primeiro lugar, reescreve-se a desigualdade (7) como

$$\mathcal{B}_1^{\perp*} \begin{bmatrix} (\Phi \otimes P + \Psi \otimes Q) & 0 \\ I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \\ C & D \\ 0 & I \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}_1^\perp} \prec 0.$$

Em seguida, definindo

$$R = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & -C & I & -D \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad R^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & C & I & D \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix},$$

e realizando algumas manipulações algébricas, obtém-se a seguinte condição equivalente:

$$\mathcal{B}^{\perp*} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11} & \begin{bmatrix} 0 \\ C^*D \end{bmatrix} \\ [0 & D^*C] & D^*D - \gamma^2 I \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}^\perp} \prec 0, \quad (8)$$

em que

$$\mathbf{R}_{11} = (\Phi \otimes P + \Psi \otimes Q) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C^*C \end{bmatrix}.$$

Neste ponto, o Lema de Finsler pode ser utilizado na obtenção de uma condição equivalente com variáveis de folga que, por não apresentar produtos triplos entre variáveis, é mais conveniente para prover solução ao problema de filtragem discreta em média frequência.

**Lema 3** *Sejam dados escalares  $0 < \omega_1 < \omega_2 < \pi$ , matrizes  $\Psi$  e  $\Phi$  como em (6), matrizes  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , com  $\det(A - e^{j\omega}I) \neq 0, \forall \omega \in [\omega_1, \omega_2]$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$ ,  $C^{p \times n}$  e  $D \in \mathbb{R}^{p \times r}$ . Então, a seguinte condição é equivalente aos itens do Lema 2.*

- i) Existem matrizes hermitianas  $0 \prec Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$  e  $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , matrizes  $L \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$  e  $N \in \mathbb{C}^{r \times n}$  tais que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11} & 0 \\ 0 & D^*D - \gamma^2 I \end{bmatrix} + \text{He} \left( \begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -I & A & B \end{bmatrix} \right) \prec 0. \quad (9)$$

**Prova:** Note que definindo

$$B = \begin{bmatrix} -I & A & B \end{bmatrix}, \quad B^\perp = \begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad X^* = \begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix},$$

o resultado segue a partir do Lema 1.  $\square$

### 3 Principais Resultados

Nesta seção, uma condição suficiente para o projeto de filtros discretos com especificações em faixas de frequência é desenvolvida por meio do resultado do Lema 3.

**Teorema 1** *Dados um sistema discreto como em (1) e escalares  $0 < \omega_1 < \omega_2 < \pi$ , se existirem matrizes hermitianas  $Q_{11} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $Q_{22} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $P_{11} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $P_{22} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , matrizes  $Q_{12} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $P_{12} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $L_{11} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $L_{21} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $M_{11} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $M_{21} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $\hat{K} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $M_{Af} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $M_{Bf} \in \mathbb{R}^{n \times q}$ ,  $C_f \in \mathbb{R}^{p \times n}$  e  $D_f \in \mathbb{R}^{p \times q}$  tais que as desigualdades (11) e*

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^* & Q_{22} \end{bmatrix} \succ 0, \quad (10)$$

em que  $\omega_c = (\omega_1 + \omega_2)/2$  e  $\omega_w = (\omega_2 - \omega_1)/2$ , sejam válidas, então as matrizes  $A_f = \hat{K}^{-1}M_{Af}$ ,  $B_f = \hat{K}^{-1}M_{Bf}$  junto com as variáveis do problema  $C_f$  e  $D_f$  compõem uma realização do filtro dado em (2) que garante  $\|H(z)\|_\infty < \gamma, \forall z = e^{j\omega}, \omega \in [\omega_1, \omega_2]$ .

**Prova:** Supondo que as desigualdades (10) e (11) sejam válidas e definindo  $Q$  como em (10),

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^* & P_{22} \end{bmatrix}, \quad Y_R = \begin{bmatrix} R_{11} & \hat{K} \\ R_{21} & \hat{K} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

os produtos entre a variável  $Y_R$ , sendo, nesse caso,  $R = L$ , ou  $R = M$ , e as matrizes  $A$  e  $B$ , cujas as expressões são dadas em (4), tornam-se

$$Y_R A = \begin{bmatrix} R_{11}A + M_{Bf}C_y & M_{Af} \\ R_{21}A + M_{Bf}C_y & M_{Af} \end{bmatrix},$$

$$Y_R B = \begin{bmatrix} R_{11}B_w + M_{Bf}D_{yw} \\ R_{21}B_w + M_{Bf}D_{yw} \end{bmatrix}.$$

Com essas definições, a desigualdade (11) pode ser reescrita como

$$\begin{bmatrix} -P - \text{He}(Y_L) & Qe^{j\omega_c} - Y_M^* + Y_L A & Y_L B & 0 \\ \star & \mathbf{M}_{22} & Y_M B & C^* \\ \star & \star & -\gamma^2 I & D^* \\ \star & \star & \star & -I \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$\begin{bmatrix} -P_{11} - \text{He}(L_{11}) & -P_{12} - L_{21}^* - \hat{K} & e^{j\omega_c} Q_{11} - M_{11}^* + L_{11}A + M_{Bf}C_y \\ * & -P_{22} - \text{He}(\hat{K}) & e^{j\omega_c} Q_{12}^* - \hat{K}^* + L_{21}A + M_{Bf}C_2 \\ * & * & P_{11} + \text{He}(M_{11}A + M_{Bf}C_y) - 2\cos(\omega_w)Q_{11} \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ & e^{j\omega_c} Q_{12} - M_{21}^* + M_{Af} & L_{11}B_w + M_{Bf}D_{yw} & 0 \\ & e^{j\omega_c} Q_{22} - \hat{K}^* + M_{Af} & L_{21}B_w + M_{Bf}D_{yw} & 0 \\ P_{12} + M_{Af} + A^*M_{21}^* + C_y^*M_{Bf}^* - 2\cos(\omega_w)Q_{12} & M_{11}B_w + M_{Bf}D_{yw} & C_z^* - C_y^*D_f^* & \\ P_{22} + \text{He}(M_{Af}) - 2\cos(\omega_w)Q_{22} & M_{21}B_w + M_{Bf}D_{yw} & -C_f^* & \\ * & -\gamma^2 I & D_{zw}^* - D_{yw}^*D_f^* & \\ * & * & -I & \end{bmatrix} \prec 0, \quad (11)$$

com

$$M_{22} = P - 2\cos(\omega_w)Q + \text{He}(Y_M A).$$

Aplicando o complemento de Schur com relação ao bloco (4, 4) e renomeando as variáveis  $Y_M = M$  e  $Y_L = L$ , tem-se

$$\begin{bmatrix} R_{11} & 0 \\ 0 & D^*D - \gamma^2 I \end{bmatrix} + \text{He} \left( \begin{bmatrix} L \\ M \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -I & A & B \end{bmatrix} \right) \prec 0.$$

Assim, conclui-se que se a desigualdade (11) for satisfeita, então a desigualdade (9) é válida com a variável  $N = 0$ , e as variáveis  $L$  e  $M$  com a estrutura apresentada em (12). Além disso, observe que a desigualdade (10) é  $Q \succ 0$ . Dessa maneira, o resultado segue pela implicação entre o Lema 3 e o item  $i$ ) do Lema 2.  $\square$

Apesar de fornecer uma condição suficiente para o projeto de filtros discretos com especificações em média frequência, o Teorema 1 não garante a estabilidade do filtro obtido, isto é, a condição pode retornar matrizes  $A_f$  com autovalores fora do círculo unitário. Para garantir que a matriz de transferência  $H(z)$  seja analítica no exterior do círculo unitário (matriz  $A$  Schur estável), necessita-se de uma restrição adicional.

**Teorema 2** *A matriz  $A$  dada em (4) é Schur estável se e somente se existirem uma matriz simétrica  $0 \prec W \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e matrizes  $M_{Af} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $\hat{K} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tais que*

$$\begin{bmatrix} W - \text{He}(\hat{K}) & M_{Af} \\ * & -W \end{bmatrix} \prec 0. \quad (13)$$

**Prova:** Como a matriz  $A$  é, por definição, assintoticamente estável e como os autovalores de  $A$  são os autovalores de  $A$  e  $A_f$ , garantir que a matriz  $A$  seja Schur estável equivale, nesta situação, a garantir a estabilidade da matriz  $A_f$ . Usando resultados consolidados da literatura (de Oliveira et al., 1999), a matriz  $A_f$  é estável se somente se

$$\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & -P \end{bmatrix} + \text{He} \left( \begin{bmatrix} \hat{K} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -I & A_f \end{bmatrix} \right) \prec 0.$$

O resultado segue fazendo-se  $M_{Af} = \hat{K}A_f$ .  $\square$

Com os resultados dos Teoremas 1 e 2, pode-se fornecer uma condição suficiente para o projeto de filtros discretos Schur estáveis com especificações em média frequência.

**Corolário 4** *Se as desigualdades (10), (11) e (13) são satisfeitas, então o filtro composto pelas matrizes  $A_f$ ,  $B_f$ ,  $C_f$ ,  $D_f$  garante que  $\|H(z)\|_\infty < \gamma, \forall z = e^{j\omega}, \omega \in [\omega_1, \omega_2]$  com  $A_f$  Schur estável.*

Dessa forma, a obtenção de um filtro Schur estável associado ao melhor desempenho  $\mathcal{H}_\infty$  possível no intervalo de frequência especificado, satisfazendo as condições (10), (11), e (13), pode ser realizada por meio do seguinte problema de otimização convexo

$$\begin{aligned} & \min. && \gamma^2 \\ & Q_{11}, Q_{12}, Q_{22}, P_{11}, P_{12}, \\ & P_{22}, L_{11}, L_{21}, M_{11}, M_{21}, \hat{K}, \\ & M_{Af}, M_{Bf}, C_f, D_f \end{aligned} \quad (14)$$

**s. a** (10), (11), (13).

Em caso de solução, as matrizes do filtro são dadas por  $A_f = \hat{K}^{-1}M_{Af}$ ,  $B_f = \hat{K}^{-1}M_{Bf}$ , e  $C_f$  e  $D_f$  variáveis do problema de otimização.

Os resultados apresentados neste trabalho podem ser estendidos para tratar sistemas com incertezas politópicas, produzindo-se filtros discretos *robustos* com custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$  em médias frequências. Para tanto, pode-se definir as variáveis que não são utilizadas para síntese do filtro (todas as variáveis do problema exceto  $M_{Af}, M_{Bf}, C_f, D_f, \hat{K}$ ) como dependentes polinomialmente do parâmetro incerto e utilizar relaxações LMIs na linha do trabalho (Oliveira e Peres, 2007) para obter o conjunto de LMIs finitas que, se verificadas, garantem a factibilidade das LMIs dependentes de parâmetros.

**Comentário 1** *Abordagens que inserem parâmetros escalares na definição da variável  $Y_R$ , como por exemplo*

$$Y_R = \begin{bmatrix} R_{11} & \lambda_m \hat{K} \\ R_{21} & \hat{K} \end{bmatrix},$$

*podem fornecer menores limitantes para a norma  $\mathcal{H}_\infty$  no intervalo de frequência especificado ao custo de*

um maior esforço computacional para realizar uma busca no parâmetro  $\lambda_m$  (Lacerda et al., 2011; Romão et al., 2015).

#### 4 Resultados Numéricos

As rotinas que geraram os resultados reportados nesta seção foram implementadas usando o MATLAB 2013b (versão 8.2.0.701) 64 bits e os pacotes Yalmip (Löfberg, 2004), SeDuMi (Sturm, 1999), e ROLMIP (Aguilhari et al., 2012) em um computador com o sistema operacional Ubuntu 14.04 LTS. Os dados numéricos associados aos filtros projetados foram truncados em duas casas decimais.

*Exemplo 1.* Considere o sistema discreto assintoticamente estável dado por

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \begin{bmatrix} -0.87 & 0.26 \\ -0.13 & 0.02 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1.95 \\ -0.16 \end{bmatrix} w(k) \\ z(k) &= \begin{bmatrix} -0.69 & -0.82 \end{bmatrix} x(k) + 0.53w(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 2.11 & 1.51 \end{bmatrix} x(k) - 0.34w(k). \end{aligned} \quad (15)$$

Se a energia da perturbação  $w(k)$  está concentrada na faixa de frequência  $\omega \in [\pi/3, \pi/2]$ , então esse conhecimento *a priori* pode ser usado para melhorar o desempenho de projetos de controladores e filtros.

Para ilustrar essa melhora no desempenho, projeta-se dois filtros para o sistema (15). O filtro

$$\begin{aligned} x_f(k+1) &= \begin{bmatrix} 0.13 & 0.01 \\ 1.14 & 0.1 \end{bmatrix} x_f(k) + \begin{bmatrix} 0.11 \\ 1.04 \end{bmatrix} y(k) \\ z_f(k) &= \begin{bmatrix} -0.15 & 0.05 \end{bmatrix} x(k) - 0.31y(k) \end{aligned} \quad (16)$$

foi calculado utilizando-se a condição necessária e suficiente de (Geromel et al., 2000), que considera todo o espectro de frequência, e o filtro

$$\begin{aligned} x_f(k+1) &= \begin{bmatrix} -0.64 & 3.48 \\ 0.08 & -0.14 \end{bmatrix} x_f(k) + \begin{bmatrix} -0.78 \\ 0.19 \end{bmatrix} y(k) \\ z_f(k) &= \begin{bmatrix} -0.6 & -0.72 \end{bmatrix} x_f(k) - 0.49y(k) \end{aligned} \quad (17)$$

obtido como solução do problema (14).

Os diagramas de valores singulares para a conexão do sistema (15) com os filtros (16) (curva preta tracejada) e (17) (curva azul) e o valor do limitante fornecido pelo problema (14) (reta vermelha) são apresentados na Figura 1. Note que, na faixa de frequência em questão (região em azul claro), o valor da norma fornecido pelo problema de otimização (14) é menor do que o valor obtido pelo filtro (16), melhorando o desempenho do sistema.

*Exemplo 2.* Considere o sistema incerto robustamente assintoticamente estável

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ 1 & 1 + \delta \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} w(k) \\ z(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} -100 & 10 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} w(k), \end{aligned} \quad (18)$$

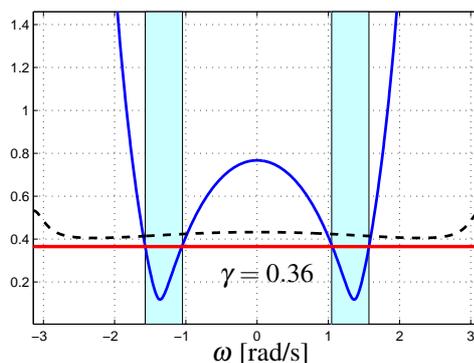


Figura 1: Diagrama de valores singulares da conexão do sistema (15) com os filtros (16) (curva preta tracejada) e (17) (curva azul) e o valor do limitante (reta vermelha) fornecido pelo problema de otimização (14).

com  $|\delta| < 0.45$ . Note que o sistema (18) pode ser transformado em uma representação politópica com dois vértices (tomando os extremos do intervalo).

O objetivo é projetar um filtro robusto que garanta um desempenho  $\mathcal{H}_\infty$  na faixa de frequências  $\pi/6 \leq \omega \leq \pi/2$ . Para tanto, utiliza-se a extensão da condição proposta para o caso incerto. Para a geração do conjunto de LMIs a partir da condição dependente de parâmetros, emprega-se o pacote computacional ROLMIP (Aguilhari et al., 2012).

O filtro robusto projetado pelo procedimento de otimização dado em (14) atribuindo grau um para todas as variáveis dependentes do parâmetro incerto é dado por

$$\begin{aligned} x_f(k+1) &= \begin{bmatrix} -2.46 & -0.44 \\ 6.31 & 0.88 \end{bmatrix} x_f(k) + \begin{bmatrix} 0.03 \\ -0.05 \end{bmatrix} y(k) \\ z_f(k) &= \begin{bmatrix} -0.21 & -0.05 \end{bmatrix} x_f(k) - 0.01y(k). \end{aligned} \quad (19)$$

Conectando-se o filtro (19) com o sistema (18), obtém-se um sistema aumentado incerto. Os diagramas de valores singulares para diferentes valores do parâmetro incerto (curvas azuis) são apresentados na Figura 2. O valor do limitante calculado pelo procedimento (14) para tratar sistemas incertos é ilustrado pela reta vermelha. Conforme esperado, os diagramas de valores singulares não ultrapassam o limitante obtido na faixa de frequências para os valores do parâmetro incerto considerados.

#### 5 Conclusões

Foram propostas novas condições LMIs para o projeto de filtros com especificações de norma  $\mathcal{H}_\infty$  em intervalos de frequência para sistemas a tempo discreto. Este tipo de projeto pode ser útil quando se tem informação *a priori* sobre as faixas de frequência que concentram a energia da entrada de perturbação, como ilustrado em um exemplo numérico.

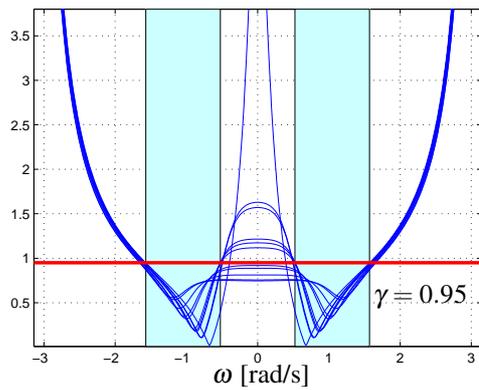


Figura 2: Diagrama de valores singulares da conexão do sistema (15) com os filtros (16) (curva preta tracejada) e (17) (curva azul) e o valor do limitante (reta vermelha) fornecido pelo procedimento de otimização (14).

Adicionalmente, foi apresentada a extensão da condição para tratar o caso de sistemas com incertezas politópicas. O processo de obtenção das LMIs finitas é feito de maneira sistemática por meio de pacotes computacionais de domínio público a partir da definição de estruturas polinômiais para as variáveis do problema.

### Agradecimentos

A FAPESP (Proc. 2014/06408-4), CNPq e CAPES.

### Referências

Agulhari, C. M., Oliveira, R. C. L. F. e Peres, P. L. D. (2012). Robust LMI parser: A computational package to construct LMI conditions for uncertain systems, *XIX CBA*, Campina Grande, PB, Brasil, pp. 2298–2305.

de Oliveira, M. C., Bernussou, J. e Geromel, J. C. (1999). A new discrete-time robust stability condition, *Syst. Control Lett.* **37**(4): 261–265.

Geromel, J. C., Bernussou, J., Garcia, G. e de Oliveira, M. C. (2000).  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  robust filtering for discrete-time linear systems, *SIAM J. Control Optim.* **38**(5): 1353–1368.

Graham, M. R., de Oliveira, M. C. e de Callafon, R. A. (2009). An alternative Kalman-Yakubovich-Popov lemma and some extensions, *Automatica* **45**(6): 1489–1496.

Iwasaki, T. e Hara, S. (2005). Generalized KYP lemma: Unified frequency domain inequalities with design applications, *IEEE Trans. Autom. Control* **50**(1): 41–59.

Iwasaki, T. e Hara, S. (2007). Feedback control synthesis of multiple frequency domain specifications via generalized KYP lemma, *Int. J. Robust Nonlinear Control* **17**(5-6): 415–434.

Iwasaki, T., Meinsma, G. e Fu, M. (2000). Generalized S-procedure and finite frequency KYP lemma, *Math. Probl. Eng.* **6**(2–3): 305–320.

Lacerda, M. J., Oliveira, R. C. L. F. e Peres, P. L. D. (2011). Robust  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  filter design for uncertain linear systems via LMIs and polynomial matrices, *Signal Process.* **91**(5): 1115–1122.

Lee, D. H. (2013). An improved finite frequency approach to robust  $\mathcal{H}_\infty$  filter design for LTI systems with polytopic uncertainties, *Int. J. Adapt. Control Signal Process.* **27**(11): 944–956.

Löfberg, J. (2004). YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB, *Proc. 2004 IEEE Int. Symp. on Comput. Aided Control Syst. Des.*, Taipei, Taiwan, pp. 284–289.

Oliveira, R. C. L. F. e Peres, P. L. D. (2007). Parameter-dependent LMIs in robust analysis: Characterization of homogeneous polynomially parameter-dependent solutions via LMI relaxations, *IEEE Trans. Autom. Control* **52**(7): 1334–1340.

Pipeleers, G., Iwasaki, T. e Hara, S. (2014). Generalizing the KYP lemma to multiple frequency intervals, *SIAM J. Control Optim.* **52**(6): 3618–3638.

Pipeleers, G. e Vandenbergue, L. (2011). Generalized KYP lemma with real data, *IEEE Trans. Autom. Control* **56**(12): 2942–2946.

Rantzer, A. (1996). On the Kalman-Yakubovich-Popov lemma, *Syst. Control Lett.* **28**(1): 7–10.

Romão, L. B. R. R., de Oliveira, M. C., Peres, P. L. D. e Oliveira, R. C. L. F. (2016). State-feedback and filtering problems using the generalized KYP lemma, *Proc. 2016 IEEE Int. Symp. on Comput. Aided Control Syst. Des.*, Buenos Aires, Argentina, pp. 1054–1059.

Romão, L. B. R. R., Oliveira, R. C. L. F. e Peres, P. L. D. (2015). Projeto de filtros robustos  $\mathcal{H}_2$  usando LMIs com escalares, *XII SBAl*, Natal, RN, Brasil, pp. 630–635.

Skelton, R. E., Iwasaki, T. e Grigoriadis, K. (1998). *A Unified Algebraic Approach to Linear Control Design*, Taylor & Francis, Bristol, PA.

Sturm, J. F. (1999). Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones, *Optim. Method Softw.* **11**(1–4): 625–653. <http://sedumi.ie.lehigh.edu/>.

You, S. e Doyle, J. C. (2013). A Lagrangian dual approach to the generalized KYP lemma, *Proc. 52nd IEEE Conf. Decision Control*, Florence, Italy, pp. 2447–2452.